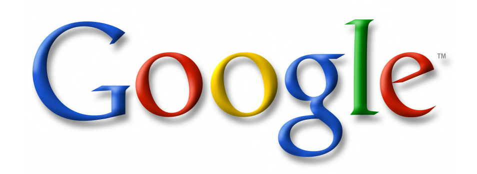
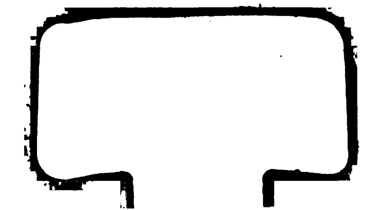




GRUNDZÜGE

FÜR DIE

STATISCHE BERECHNUNG DER BETON- UND EISENBETONBAUTEN

VON

M. KOENEN, BERLIN

Dritte durchgesehene und erweiterte Auflage.



BERLIN 1906
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN.

Vorwort zur dritten Auflage.

Die erste Auflage des vorliegenden Heftes verdankte ihr Entstehen einer Anregung des Deutschen Betonvereins, der einer solchen Abhandlung für den Katalog seiner Düsseldorfer Ausstellung 1902 bedurfte. Die für den Eisenbeton hier mitgeteilte Berechnungsweise, welche inzwischen auch von der preußischen Regierung den „Ministeriellen Bestimmungen für die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten“ vom Jahre 1904 zugrunde gelegt worden ist, erschien zuerst im Jahre 1897 in einer für einen gewissen Leserkreis vom Verfasser herausgegebenen Druckschrift „Wissenschaftliche Begründung der Koenenschen Voutenplatte“.

Obwohl in den früheren Auflagen davon Abstand genommen war, fertige Dimensionierungsformeln aufzustellen, da es für jeden Ingenieur ein leichtes ist, aus den allgemeinen Grundformeln diejenigen für den speziellen Fall abzuleiten, die Darbietung solcher aber nur die Zahl Unberufener zu mehren geeignet ist, hat sich doch die Notwendigkeit herausgestellt, den nach dieser Richtung geäußerten Wünschen insoweit entgegenzukommen, als die Berechnungen für Eisenbetonbalken und -Platten bis zu den für die Bestimmung der Abmessungen unmittelbar verwertbaren Formeln durchgeführt worden sind. Hierdurch hat sich der Umfang erweitert, und dementsprechend hat auch die Verwendbarkeit des Werkchens für statische Berechnungen von Eisenbetonbauten gewonnen.

Berlin, im Februar 1906.

Der Verfasser.

Grundzüge für die statische Berechnung der Beton- und Eisenbetonbauten.

I. Reiner Betonbau.

1. Einleitung. Bis in die neueste Zeit wurden Pfeiler, Gewölbe usw. aus Beton nach denselben Grundregeln berechnet, wie solche für gewöhnliches Ziegelmauerwerk seit längerer Zeit allgemein üblich sind. Bekanntlich werden bei diesem die Stärkeabmessungen so bestimmt, daß die Bruchfestigkeit ohne Mitwirkung etwa entstehender Zugspannungen, vielmehr lediglich durch Ausnutzung des sicher vorhandenen Druckwiderstandes gewährleistet ist. Für Kalkmörtelmauerwerk mag diese Berechnungsweise nach wie vor ihre alleinige Berechtigung haben. Für Zementmörtelmauerwerk jedoch, besonders aber für Zementbeton mit verhältnismäßig hoher Zugfestigkeit dürfen die entstehenden Zugspannungen für die Beurteilung der Bruchsicherheit mit in Betracht gezogen werden, und in besonderen später zu erörternden Fällen ist es nötig, die Größe derselben zu ermitteln. Selbstverständlich hängt die Festigkeit des Betons von der Beschaffenheit und dem Mischungsverhältnis der ihn zusammensetzenden Bestandteile sowie deren Verarbeitung ab. Das Nähere hierüber findet man ausführlich in den Leitsätzen für die Vorbereitung, Ausführung und Prüfung von Bauten aus Stampfbeton.[1]) Allgemein schwankt hiernach die Druckfestigkeit zwischen 40 und 400 kg/qcm, die Zugfestigkeit zwischen 4 und 40 kg/qcm.

2. Druck. a) Zentrischer Druck. Bezeichnet P die Mittelkraft der auf den Querschnitt eines (stabförmigen) Betonkörpers mit der Querschnittsfläche F wirkenden, gleichmäßig verteilten Druckkräfte, σ die in demselben erzeugte Druckspannung für die Flächeneinheit, so wird

$$\sigma = \frac{P}{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Hierbei fällt der Angriffspunkt der Mittelkraft P mit dem Schwerpunkt des Querschnitts zusammen, weshalb ein solcher Druck auch „zentrisch“ oder „achsial“ genannt wird.

Der Körper erleidet unter der Einwirkung solcher Druckkräfte eine elastische Zusammenpressung. Für einen Stab, dessen Länge gleich der Längeneinheit ist, beträgt diese — „spezifische“ Zusammenpressung genannt —

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

---

1) „Leitsätze für die Vorbereitung, Ausführung und Prüfung von Bauten aus Stampfbeton“. Erschienen im Verlage von Wilh. Ernst & Sohn, Berlin.

oder in der ebenfalls gebräuchlichen Form

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma^m, \quad \ldots \ldots \quad 2a)$$

in welchen Ausdrücken $\alpha = \frac{1}{E}$ und m von der Art des Materials (hier von der Zusammensetzung und Verarbeitung des Betons) abhängig sind. α kann als spezifische Zusammenpressung unter der Spannungseinheit aufgefaßt werden; E ist unter dem Namen „Elastizitätsmodul“ bekannt. Da m für Beton zwischen 1,10 und 1,20 wechselt, also stets größer als 1 ist, so wachsen die elastischen Längenänderungen bei Beton nicht proportional mit den Spannungen wie bei Schmiedeeisen, sondern etwas schneller als letztere.

Im folgenden sind die von C. Bach[1]) für eine Reihe von Betonarten gefundenen Mittelwerte für $\alpha = \frac{1}{E}$ und m, welche innerhalb der für die Praxis in Betracht kommenden Spannungsgrenzen Gültigkeit besitzen, zusammengestellt:

Körper aus reinem Zement.

$$\frac{1}{E} = \alpha = \frac{1}{250000}; \quad m = 1{,}09.$$

Zementmörtel.

1 Zement,	$1^1/_2$ Donausand:	$\frac{1}{E} = \alpha = \frac{1}{356000}$;	$m = 1{,}11$
1 „	3 „	$\frac{1}{E} = \alpha = \frac{1}{315000}$;	$m = 1{,}15$
1 „	$4^1/_2$ „	$\frac{1}{E} = \alpha = \frac{1}{230000}$;	$m = 1{,}17.$

Körper aus Beton.

1 Zement,	$2^1/_2$ Donausand,	5 Donaukies . . .	$\frac{1}{E} = \alpha = \frac{1}{298000}$;	$m = 1{,}145$
1 „	$2^1/_2$ Eggingersand,	5 Kalksteinschotter	$\frac{1}{E} = \alpha = \frac{1}{457000}$;	$m = 1{,}157$
1 „	5 Donausand,	6 Donaukies . . .	$\frac{1}{E} = \alpha = \frac{1}{280000}$;	$m = 1{,}137$
1 „	3 „	6 Kalksteinschotter	$\frac{1}{E} = \alpha = \frac{1}{380000}$;	$m = 1{,}161$
1 „	5 „	10 Donaukies . . .	$\frac{1}{E} = \alpha = \frac{1}{217000}$;	$m = 1{,}157$
1 „	5 Eggingersand,	10 Kalksteinschotter	$\frac{1}{E} = \alpha = \frac{1}{367000}$;	$m = 1{,}207$

b) Exzentrischer Druck. Fällt der Mittelpunkt des Drucks nicht mit dem Schwerpunkt des Querschnitts zusammen, so entsteht neben dem gleichmäßig verteilt gedachten Schwerpunktsdruck noch ein Moment mit Biegungswirkung, d. h. mit Druck- und Zug-

[1]) Vergl. C. Bach, Elastizität und Festigkeit, IV. Aufl., 1902.

spannungen, welche vom Schwerpunkte ab in gleichgespannten parallelen, zur Biegungsebene meist senkrechten Querschnittsschichten in gleichem Verhältnis wie deren Abstand vom Schwerpunkte zunehmen, also auf der Druckseite vermehrte, auf der entgegengesetzten Seite verminderte Druckspannung zur Folge haben. Ein zwischen zwei Brettchen gefaßtes, exzentrisch gedrücktes Stück Gummi veranschaulicht den dann vorliegenden Spannungszustand, indem es auf der Druckseite (in der Nähe der Druckmittelkraft) mehr zusammengepreßt erscheint als auf der anderen.

Bezeichnet e den Abstand des Druckmittelpunkts vom Schwerpunkt in einer Hauptachse, W das Widerstandsmoment des Querschnitts gegen die zur Verbindungslinie der gedachten beiden Punkte senkrechte Hauptachse, so wird unter der Voraussetzung, daß der Abstand e eine gewisse Grenze (den sogenannten Zentralkern des Querschnitts) nicht überschreitet, in dem am stärksten gedrückten Punkte am Rande die Druckspannung

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pe}{W}; \quad \ldots \ldots \quad 3)$$

und in dem am wenigsten gedrückten Punkte am entgegengesetzten Rande

$$\sigma = \frac{P}{F} - \frac{Pe}{W} \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

diese wird, wie ersichtlich, $= 0$, wenn $\frac{Pe}{W} = \frac{P}{F}$ oder $e = \frac{W}{F}$, woraus sich die Lage der Kerngrenze bestimmen läßt.

Liegt der Druckmittelpunkt außerhalb dieser Kerngrenze, die beispielsweise für rechteckige Mauer- oder Gewölbequerschnitte, die rechtwinklig zu einer Seite auf Biegung beansprucht werden, nur das mittlere Drittel umfaßt, so entstehen am jenseitigen Rande Zugspannungen, die bei Zementbeton unter Beobachtung der gebotenen Sicherheit mit in Ansatz gebracht werden dürfen, die aber durchaus berücksichtigt werden müssen, wenn es sich um die Dichtigkeit des Betons in gezogenen Schichten handelt; denn zu große Zugspannungen würden Risse zur Folge haben, die dem Wasser usw. den Eintritt gestatten.

Außer bei achsial oder innerhalb des Zentralkerns exzentrisch gedrückten Mauern oder Pfeilern treten reine Druckspannungen noch in der Form von Tangentialspannungen auf, welche bei Behältern mit einfach oder doppelt gekrümmten Wandungen durch äußeren Wasser- oder Erddruck erzeugt werden, oder bei Gewölben, welche beständig die gleiche Last tragen und nach der Gleichgewichtskurve geformt sind.

Dasselbe gilt von reinen Zugspannungen, welche infolge von Normaldrücken auf die konkave Seite gekrümmter Umfassungswände von Behältern oder dergleichen entstehen. Die Verteilung solcher Tangential-Druck- oder Zugspannungen über die Wandstärke läßt sich unter Anwendung der Bachschen Versuche über das elastische Verhalten von Betonkörpern auf die Lamésche Theorie ermitteln, deren Entwicklung hier zu weit führen dürfte.

3. **Biegung.** a) Genaue Berechnungsweise. Ein auf Biegung beanspruchter stab- oder plattenförmiger Betonkörper sei an irgend einem Querschnitt angegriffen durch ein Biegungsmoment von der Größe M. Die durch dasselbe hervorgerufene elastische Formänderung zeigt sich, wie bei allen elastischen Körpern, teils als Zusammenpressung, teils als Dehnung der durch je zwei benachbarte Querschnitte begrenzten Körperscheiben (Abb. 1 u. 2), und zwar ist an den äußeren Rändern jeder Scheibe die Zusammenpressung oder Dehnung am größten; nach dem Inneren der Scheibe hin nehmen die Längenänderungen ab, um an einer gewissen Stelle durch Null ineinander überzugehen. Diese Stelle nennt man ihres neutralen Verhaltens wegen die „neutrale Schicht" oder Nullinie. Da aber durch Beobachtung festgestellt ist, daß nach der Formänderung die Querschnitte noch eben und rechtwinklig zur alsdann gebogenen Mittelachse des Stabes (oder Platte) bleiben, wie Abb. 1 andeutet, so ist die in Abb. 2 dargestellte Seitenansicht (bezw. der Schnitt) einer Scheibe aus dem Rechteck in das durch punktierte Linien angedeutete Trapez übergegangen.

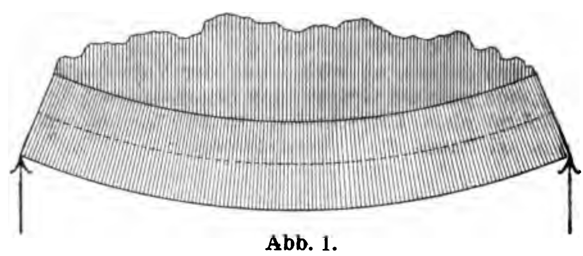


Abb. 1.

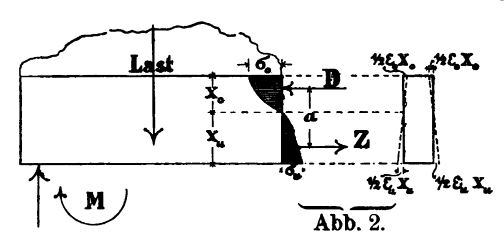


Abb. 2.

Die Spannungen, als Ursache der so gekennzeichneten Längenänderungen, sind natürlich auf der zusammengepreßten Seite Druck- und auf der gedehnten Seite Zugspannungen. Sie sind parallel zur Stabachse gerichtet und haben nach dem in Gl. 2 angegebenen Formänderungsgesetze einen genau feststellbaren, etwa wie in Abb. 2 durch wagerechte Strichelung angedeuteten Verlauf.

Die Summen D und Z der so dargestellten Druck- und Zugspannungen müssen, falls auf das abgetrennt gedachte Stab- oder Plattenstück weitere zur Stabachse parallele Kräfte nicht wirken, zum Gleichgewicht gegen Bewegung in der Stabachsenrichtung einander gleich sein, also

$$D = Z \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

Ferner ergeben die Mittelkräfte D und Z bei dem Abstand a (Hebelsarm a) ein Kräftepaar Da oder Za, welches als das Moment der inneren widerstehenden Spannungen, d. i. als Wider-

standsmoment dem Angriffsmoment M gleich sein muß, wenn keine weitere als die bereits durch die Biegung hervorgebrachte Drehung des abgetrennt zu denkenden Stab- oder Plattenstücks eintreten soll; also

$$M = Da = Za \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6)$$

Für die weitere Behandlung dieser Aufgabe sei ein wagerecht gelagerter Stab oder Platte von rechteckigem Querschnitt mit Höhe h und Breite b ins Auge gefaßt, welche nur von lotrecht gerichteten Kräften (Lasten und Auflagerdrücken) angegriffen und durch einen beliebigen Querschnitt in zwei Stücke abgetrennt sei, von denen eines in Abb. 2 dargestellt sein möge. Es sind nun in der Hauptsache die am oberen und unteren Rande des Querschnitts auftretenden größten, aber noch unbekannten Druck- und Zugspannungen σ_o und σ_u rechnungsmäßig festzustellen. Zu diesem Zwecke führen wir außer diesen beiden Unbekannten noch die Hilfsunbekannten x_o und x_u als die unbekannten Abstände der neutralen Schicht vom oberen bezw. unteren Rande sowie die Größen ε_o und ε_u als die gleichfalls unbekannten spezifischen Längenänderungen im beiderseitigen Abstand 1 von der neutralen Schicht ein; die entsprechenden Längenänderungen am Rande besitzen danach die unbekannten Werte $\varepsilon_o \, x_o$ und $\varepsilon_u \, x_u$.

Zur Auffindung der so gekennzeichneten sechs Unbekannten gehören bekanntlich ebensoviel Gleichungen, die sich folgendermaßen aufstellen lassen:

1) eine rein geometrische,

$$x_o + x_u = h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 7)$$

2) eine gleichfalls geometrische, aus der Formänderung abgeleitete,

$$\varepsilon_o = \varepsilon_u$$

3) und 4) zwei aus der Beziehung zwischen Spannung und Längenänderung abgeleitete Gleichungen (vergl. Gl. 2, S. 5),

$$\sigma_o^m = \frac{1}{\alpha} \varepsilon_o x_o; \quad \sigma_u^{m_1} = \frac{1}{\alpha_1} \varepsilon_u x_u.$$

In letzterer Gleichung haben α_1 und m_1 eine ähnliche Bedeutung in bezug auf Dehnung und Zugspannung wie früher α und m in bezug auf Zusammenpressung und Druckspannung.

Die 5. und 6. Gleichung sind durch die oben erörterten beiden Gleichgewichtsbedingungen gegeben, deren Kräfte D und Z und deren Moment noch näher zu berechnen sind.

Hierzu bezeichne σ die Spannung an irgend einem Punkte des Querschnitts und des zu demselben gehörigen Flächenteilchens dF mit dem Abstand x von der neutralen Schicht, dann ist zunächst auf der Druckseite

$$\sigma^m = \frac{1}{\alpha} \varepsilon_o x$$

und demnach mit Benutzung der dritten Gleichung

$$\frac{\sigma^m}{\sigma_o^m} = \frac{x}{x_o}.$$

Es verhalten sich also bei Beton die Spannungen in der $m$ten Potenz wie die Abstände von der neutralen Schicht. Bei Körpern, für welche $m = 1$, wie z. B. Schmiedeeisen und Stahl, ergibt diese Formel das bekannte der Navierschen Biegungstheorie zugrunde liegende Proportionalitätsgesetz. Aus obiger Gleichung folgt

$$\sigma = \sigma_o \sqrt[m]{\frac{x}{x_o}}$$

und demnach

$$D = \int_{x=0}^{x=x_o} \sigma \, d F = \frac{\sigma_o}{\sqrt[m]{x_o}} \int_{x=0}^{x=x_o} d F \cdot \sqrt[m]{x}$$

Ebenso wird

$$Z = \frac{\sigma_u}{\sqrt[m^1]{x_u}} \int_{x=0}^{x=x_u} d F \sqrt[m^1]{x}$$

Mit $dF = b \, dx$ geht die Gleichung $D = Z$ über in

$$\frac{\sigma_o b}{\sqrt[m]{x_o}} \int_0^{x_o} x^{\frac{1}{m}} dx = \frac{\sigma_u b}{\sqrt[m^1]{x_u}} \int_0^{x_u} x^{\frac{1}{m^1}} dx \qquad \text{oder}$$

$$\frac{\sigma_o}{\sqrt[m]{x_o}} \frac{m}{m+1} \sqrt[m]{x_o^{(m+1)}} = \frac{\sigma_u}{\sqrt[m^1]{x_u}} \frac{m_1}{m_1+1} \sqrt[m^1]{x_u^{(m_1+1)}}$$

oder endlich

$$\frac{m}{m+1} \sigma_o x_o = \frac{m_1}{m_1+1} \sigma_u x_u \quad . \; . \; . \; . \; 8)$$

Das Moment der Spannung σdF, bezogen auf die neutrale Schicht, also mit dem Hebelsarm x, ist gleich $\sigma dF x$, demnach das ganze Widerstandsmoment auf Druck- und Zugseite

$$= \frac{\sigma_o b}{\sqrt[m]{x_o}} \int_0^{x_o} x^{\left(\frac{1}{m}+1\right)} dx + \frac{\sigma_u b}{\sqrt[m^1]{x_u}} \cdot \int_0^{x_u} x^{\left(\frac{1}{m^1}+1\right)} dx;$$

also lautet die letzte Gleichung, die Momentgleichung:

$$M = \frac{\sigma_o b}{\sqrt[m]{x_o}} \cdot \frac{m}{1+2m} \sqrt[m]{x_o^{1+2m}} + \frac{\sigma_u b}{\sqrt[m^1]{x_u}} \cdot \frac{m_1}{1+2m_1} \sqrt[m]{x_u^{1+2m_1}}$$

oder

$$M = \frac{m}{1+2m} \sigma_o b x_o^2 + \frac{m_1}{1+2m_1} \sigma_u b x_u^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 9)$$

(Bemerkung. Für Körper, bei welchen $\alpha_1 = \alpha$ und die Form-

änderung der Spannung proportional ist, z. B. bei Schmiedeeisen und Stahl, wird $m = m_1 = 1$; die Spannung $\sigma_o = \sigma_u$; $x_o = x_u = \frac{h}{2}$, und es liefert Gl. 9 Übereinstimmung mit der bekannten Momentgleichung $M = \sigma_o \cdot \frac{b h^2}{6}$.)

Aus den so entwickelten Gleichungen lassen sich nun die für uns besonders wichtigen Unbekannten σ_o σ_u x_o und x_u ermitteln.

b) Angenähertes Verfahren. Setzt man $m = m_1 = 1$, so ist dies gleichbedeutend mit der Annahme einer den Abständen von der neutralen Schicht proportional verlaufenden Spannungsverteilung (Abb. 3). Da die Inhalte der Spannungsdreiecke nichtsdestoweniger den unter a) betrachteten Werten D und Z annähernd gleich sein müssen, so ergeben sich, wie ohne weiteres aus dem Vergleich der durch punktierte Linien begrenzten Spannungsfiguren mit den geradlinig begrenzten hervorgeht, die Randspannungen (als Höhen dieser Dreiecke) etwas zu groß. Man hat also bei der Anwendung des nachstehend entwickelten angenäherten Verfahrens eine entsprechend höhere Sicherheit.

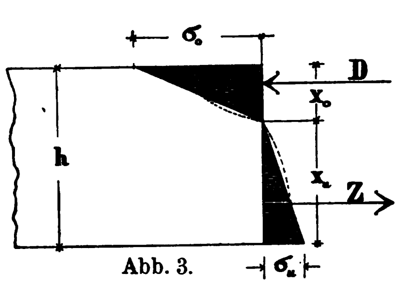


Abb. 3.

Das Verhältnis der Formänderungskoeffizienten von Zug zu Druck, also $\frac{\alpha_1}{\alpha}$ werde mit μ bezeichnet; dasselbe ist mit der Zusammensetzung und Verarbeitung des Betons veränderlich. Für die vier Unbekannten σ_o σ_u x_o und x_u ergeben sich dann ohne weiteres die vier Gleichungen:

$$1)\ x_u + x_o = h; \qquad 2)\ \frac{\sigma_o}{\sigma_u} = \mu \frac{x_o}{x_u}$$

$$3)\ \frac{\sigma_o x_o}{2} = \frac{\sigma_u x_u}{2}; \qquad 4)\ \frac{\sigma_o x_o}{2} \cdot \frac{2}{3} h b = M.$$

Hieraus folgt ohne weiteres:

$$\sigma_o = \frac{3M}{bh^2}(1 + \sqrt{\mu}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

$$\sigma_u = \frac{3M}{bh^2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{\mu}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

Da aber μ mindestens $= 9$ angenommen werden darf, so wird die Druckspannung

$$\sigma_o = \frac{12 M}{bh^2} = 2 \frac{M}{\frac{bh^2}{6}}.$$

und die Zugspannung

$$\sigma_u = \frac{4M}{bh^2} = \frac{2}{3}\frac{M}{\frac{bh^2}{6}}.$$

Für $\mu = 16$ (Mittelwert) wird

$$\sigma_o = 2\frac{1}{2}\frac{M}{\frac{bh^2}{6}}; \qquad \sigma_u = \frac{5}{8}\frac{M}{\frac{bh^2}{6}};$$

für $\mu = 25$ (wohl Höchstwert) wird

$$\sigma_o = 3\frac{M}{\frac{bh^2}{6}}; \qquad \sigma_u = \frac{3}{5}\frac{M}{\frac{bh^2}{6}}.$$

Die Druckspannungen sind also zwei- bis höchstens dreimal, die Zugspannungen $^2/_3$- bis $^3/_5$mal so groß wie für Druck und Zug gleich elastische Körper mit regelmäßiger Formänderung.

4. Abscherung. a) Unmittelbares Abscheren. Wird der Querschnitt F eines Betonkörpers auf unmittelbares Abscheren in Anspruch genommen durch eine zur Querschnittsfläche parallel gerichtete Kraft Q, so können die in der Querschnittsfläche erzeugten Schubspannungen als gleichmäßig verteilt angesehen werden; demnach ergibt sich die Schubspannung für die Flächeneinheit

$$\tau = \frac{Q}{F} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 12)$$

b) Abscheren bei Biegung. Die größte Beanspruchung auf Abscheren bei Biegung tritt ein in der neutralen Schicht, und zwar in dem Querschnitt, für welchen die Transversalkraft (Querkraft oder Schubkraft) am größten wird. Bei der Auflagerung an beiden Enden (Balken auf zwei Stützen) wird die Transversalkraft stets unmittelbar neben dem größten Auflagerdruck A (Abb. 4) am größten und diesem gleich sein. Hat letzterer den Wert A, so besteht für die Endscheibe am Auflager die Momentengleichung (Abb. 4)

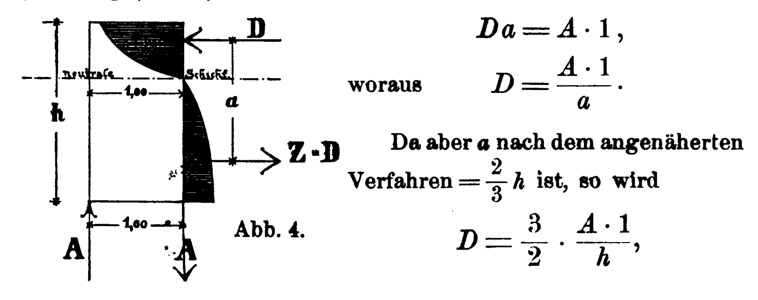


Abb. 4.

$$Da = A \cdot 1,$$

woraus

$$D = \frac{A \cdot 1}{a}.$$

Da aber a nach dem angenäherten Verfahren $= \frac{2}{3}h$ ist, so wird

$$D = \frac{3}{2} \cdot \frac{A \cdot 1}{h},$$

und bei der Breite b des Querschnitts in der am stärksten auf Abscheren beanspruchten neutralen Schicht, wie aus Abb. 4 ersichtlich, die Schubspannung

$$\tau = \frac{D}{1{,}00 \cdot b} = \frac{3}{2} \cdot \frac{A \cdot 1}{h \cdot b \cdot 1} = \frac{3}{2} \frac{A}{bh} \quad . \; . \; 13)$$

Mit jeder wagerechten Schubspannung τ ist eine lotrechte τ' verbunden, welche wegen des Gleichgewichts des von ihnen angegriffenen Körperelementchens (Abb. 5) gegen Drehen, also wegen Gleichung $\tau' \cdot 1 = \tau \cdot 1$ einander gleich sein müssen, also

Abb. 5.

$$\tau' = \tau = \frac{3}{2} \frac{A}{bh} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 13a)$$

II. Eisenbetonbau.

5. Einleitung. Nachdem in neuester Zeit durch C. Bach, wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt, die für die Formänderung gedrückter Zement-, Zementmörtel- und Betonkörper bestehenden Gesetze zuverlässig festgestellt sind, kann man dazu übergehen, auch die statischen Berechnungen der Eisenbetonkonstruktionen auf eine wissenschaftlich richtigere Grundlage zu stellen. Bisher genügte das vom Verfasser angegebene und im Jahrgang 1886 des Zentralblattes der Bauverwaltung, Seite 462 sowie in der 1887 erschienenen sogen. Monier-Broschüre von ihm mitgeteilte Verfahren, welches durch das nachstehend entwickelte insofern ergänzt wird, als eben die Bachschen Formänderungsgesetze für Beton in Verbindung mit denen des Eisens und deren Einfluß auf das Rechnungsergebnis Berücksichtigung finden konnten. Wir halten auch hier an dem damals ausgesprochenen Grundsatze fest, wonach dem Beton nur Druck- und keine Zugspannungen zugemutet werden sollten und der Eisenquerschnitt so reichlich gewählt werden müsse, daß er allein zur Aufnahme der Zugspannungen genügt. Wenn ein solches Verfahren auch einen geringen Mehraufwand an Material mit sich bringt, so gewährt es dafür eine erhöhte und einwandfreiere Sicherheit der Konstruktion sowie erhebliche Vereinfachung der statischen Berechnungen, beides Umstände, deren Beobachtung auch von den die Entwürfe und Berechnungen prüfenden Behörden gewünscht oder gar vorgeschrieben wird.

6. Druck. a) Zentrischer Druck. In einen stabförmigen Betonkörper mit dem Betonquerschnitt F_b seien Eisenstäbe mit Gesamtquerschnitt F_e parallel zu seiner Längsrichtung gleichmäßig verteilt eingebettet. Dieser Körper werde nach Richtung seiner Länge einem über seinen Querschnitt gleichmäßig verteilten Druck P ausgesetzt. Die Querschnittsabmessungen des Körpers seien jedoch im Verhältnis zu seiner Länge so groß, daß ein Einknicken desselben nicht zu befürchten ist, vielmehr nur eine über den Querschnitt gleichmäßig verteilte Zusammendrückung eintritt, die also sowohl für den Betonkörper als auch für die

Eiseneinlagen gleich groß ist. Aus dem letzteren Umstande läßt sich dann mit Hilfe der Formänderungsgesetze für Beton und Eisen ohne weiteres feststellen, mit welchen Anteilen beide Körperteile an der Druckübertragung tätig sind. Bezeichnet man ähnlich wie α für Beton, mit β die durch die Spannungseinheit erzeugte spezifische Längenänderung des Eisens, mit σ_b die Beanspruchung des Betons, mit σ_e diejenige des Eisens, so wird demnach (vergl. Gl. 2) die Zusammenpressung

$$\sigma_b^m \alpha = \sigma_e \beta; \quad \text{oder mit } m = 1$$

(vergl. 3b, Seite 11)

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

oder unter Einführung der Elastizitätsmoduln (vergl. Seite 6)

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_e} = \frac{E_b}{E_e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14a)$$

Das Verhältnis der Spannungen ist also unabhängig von der Größe der Querschnitte; dieselben verhalten sich umgekehrt wie die spezifischen Längenänderungen unter der Spannungseinheit und direkt wie die Elastizitätsmoduln der beiden Materialien; m. a. W. je nachgiebiger oder zusammenpreßbarer das eine Material ist im Vergleich zum anderen, um so geringer ist auch die in ihm erzeugte Spannung im Vergleich zu derjenigen des steiferen Materials.

Die auf die Querschnitte F_b und F_e entfallenden Druckanteile betragen $\sigma_b \cdot F_b$ bezw. $\sigma_e \cdot F_e$; für sie ergibt sich nach obigen Gleichungen das Verhältnis:

$$\frac{\sigma_b \cdot F_b}{\sigma_e \cdot F_e} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{F_b}{F_e} = \frac{E_b}{E_e} \cdot \frac{F_b}{F_e}.$$

Die Anteile verhalten sich also direkt wie die Querschnitte und umgekehrt wie die spezifischen Zusammenpressungen unter der Spannungseinheit bezw. direkt wie die Elastizitätsmoduln; m. a. W. der nachgiebigere Körper weicht dem Druck leichter aus, erleidet also auch einen geringeren spezifischen Druck, während der straffere Körper, hier das Eisen, der gleichen Zusammenpressung einen größeren elastischen Widerstand entgegensetzt.

Mit Summe $\sigma_b \cdot F_b + \sigma_e \cdot F_e = P$ u. Gl. 14) berechnen sich dann leicht die Spannungen selbst, womit dann auch die Anteile $\sigma_b \cdot F_b$ und $\sigma_e \cdot F_e$ bekannt sind, und zwar wird, indem man $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{E_e}{E_b} = n$ setzt:

$$\sigma_b = \frac{P}{F_b + nF_e}; \quad \sigma_e = \frac{P}{F_e + \frac{1}{n} \cdot F_b} \quad \ldots \quad 15)$$

Für die Ermittlung der Beanspruchung des Betonquerschnitts ist also der Eisenquerschnitt mit dem $n$fachen Betrage in Rechnung zu ziehen, während für die Feststellung der Eisenbeanspruchung der Beton nur mit $\frac{1}{n}$ seines Querschnitts in Ansatz zu bringen ist,

wenn beide Querschnittsanteile auf einerlei **Material reduziert** werden. Nach den neuen ministeriellen Bestimmungen ist $n = 15$ anzunehmen; hierbei ist $E_e = 2\,250\,000$ kg/qcm und $E_b = 150\,000$ kg/qcm gesetzt.

b) Exzentrischer Druck. Bei exzentrischem Druck entsteht neben dem Achsialdruck P das Biegungsmoment Pe. Ersterer verteilt sich nach den unter a) erörterten Gesetzen mit den in obigen Gleichungen 15) ermittelten Spannungen. Hierzu sind nun die durch das Biegungsmoment Pe erzeugten Zug- und Druckspannungen hinzuzufügen (vergl. unter 8).

7. Zug. Da auf die Mitarbeit des Betons bei der Aufnahme von Zugspannungen verzichtet werden soll, so wird unter Voraussetzung eines unter 6 gekennzeichneten, nun aber von der Zugkraft P ergriffenen Betoneisenkörpers die Zugbeanspruchung des Eisens

$$\sigma_e = \frac{P}{F_e}.$$

8. Biegung. Für die Beurteilungen der Biegungsspannungen gelten die bekannten unter 3 erörterten Gesetze. Wir haben nur noch die Wirkung der Eiseneinlagen hinzuzufügen und diejenige der Betonzugspannungen als nicht vorhanden anzusehen. Sowohl auf der Zugseite des Querschnitts als auch auf der Druckseite seien Eisenstäbe parallel zur Stabachse eingelegt. Ihre Querschnitte F_e bezw. F_e^1 seien im Verhältnis zur Stab- oder Plattendicke h nur von geringer Höhe, so daß man die in ihnen auftretenden Zug- und Druckspannungen als gleichmäßig verteilt ansehen kann. Bezeichnet man letztere für die Flächeneinheit mit σ_e und σ_e^1, so beträgt die Gesamtzug- und Druckspannung des Eisens $\sigma_e \cdot F_e$ bezw. $\sigma_e^1 \cdot F_e^1$, welche gegen die neutrale Schicht mit den Hebelsarmen w und w^1 (Abb. 6) und den Widerstandsmomenten $\sigma_e \cdot F_e \cdot w$ bezw. $\sigma_e^1 \cdot F_e^1 \cdot w^1$, beide in demselben Sinne drehend, zur Wirkung kommen.

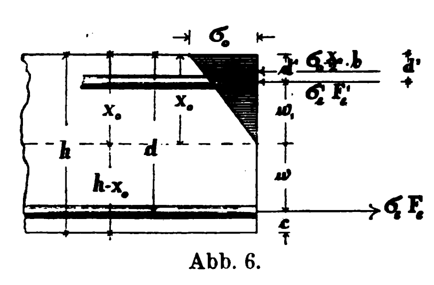


Abb. 6.

Wenn hier von vornherein die vereinfachte linear veränderliche Druckverteilung im gedrückten Betonquerschnitt zugrunde gelegt wird, vgl. 3b, Seite 11, welche nach den früheren Erörterungen umsomehr zulässig erscheint, als die damit berechneten Spannungen sich etwas zu groß ergeben, so wird das Gesamtwiderstandsmoment des Querschnitts unter Festhaltung der in 3, Abb. 3 u. 6, gewählten Bezeichnungen =

$$\frac{\sigma_0 x_0}{2} \cdot b \cdot \frac{2}{3} x_0 + \sigma_e^1 \cdot F_e^1 \cdot w^1 + \sigma_e \cdot F_e \cdot w,$$

welches gleich ist dem Angriffsmoment M; oder

1) $$M = \frac{\sigma_0 x_0^2}{3} b + \sigma_e^1 \cdot F_e^1 (x_0 - d^1) + \sigma_e \cdot F_e (d - x_0)$$

wenn mit d bezw. d^1 die bekannten Abstände des Schwerpunkts der Eisenquerschnitte von der Oberkante des Gesamtquerschnitts bezeichnet werden (vergl. Abb. 6).

Zur Auffindung der vier Unbekannten σ_0 σ_e σ_e^1 u. x_0 bedarf es also noch dreier Gleichungen; als solche sind vorhanden: eine Gleichgewichtsbedingung

2) $$\sigma_e \cdot F_e = \frac{\sigma_0 \cdot x_0}{2} \cdot b + \sigma_e^1 \cdot F_e^1$$

und zwei aus der Formänderung abgeleitete Beziehungen, insofern sich verhält

3) $$\frac{\sigma_e}{\sigma_e^1} = \frac{d - x_0}{x^0 - d^1};$$ 4) $$\frac{\sigma_e}{\sigma_0} = n \cdot \frac{d - x_0}{x_0}.$$

Aus den vorstehenden vier Gleichungen lassen sich die gesuchten Spannungen und die Lage der neutralen Schicht leicht berechnen.

Aus Gleichung 2), 3) und 4) ergibt sich zur Bestimmung des Abstandes x_0 der neutralen Schicht vom oberen Rand die quadratische Gleichung

$$x_0^2 + 2 \frac{n}{b} \cdot (F_e + F_e^1) \cdot x_0 - 2 \frac{n}{b} \cdot (d \cdot F_e + d^1 \cdot F_e^1) = 0. \quad 16)$$

Ist x_0 bekannt, so folgt die Druckspannung im Beton

$$\sigma_0 = \frac{6 M \cdot x_0}{b \cdot x_0^2 \cdot (3 \cdot d - x_0) + 6 \cdot F_e^1 n \cdot (x_0 - d^1) \cdot (d - d^1)}, \quad 17)$$

die Zugspannung der unteren Eiseneinlage

$$\sigma_e = \sigma_0 \frac{(d - x_0) \cdot n}{x_0}, \quad \dots\dots \quad 18)$$

ferner die Druckspannung der oberen Eiseneinlage

$$\sigma_e^1 = \sigma_0 \cdot \frac{(x_0 - d^1) \cdot n}{x_0} \quad \dots\dots \quad 19)$$

In den meisten Fällen begnügt man sich mit Eiseneinlagen auf der Zugseite. Es fallen dann die Größen F_e^1, σ_e^1 u. d^1 in obigen Gleichungen fort. Für die noch bleibenden drei Unbekannten σ_0, σ_e u. x_0 bestehen dann drei Gleichungen

1) $$M = \sigma_0 \cdot \frac{b \cdot x_0^2}{3} + \sigma_e \cdot F_e (d - x_0)$$

2) $$\sigma_e \cdot F_e = \frac{\sigma_0 \cdot x_0}{2} \cdot b$$

3) $$\frac{\sigma_e}{\sigma_0} = \frac{(d - x_0)}{x_0} \cdot n.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich:

$$x_0 = \frac{n \cdot F_e}{b} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} \cdot \frac{b \cdot d}{F_e}} - 1 \right) \quad . \; . \; . \; 20)$$

und aus den beiden ersten

$$\sigma_0 = \frac{2\,M}{b x_0 \left(d - \frac{x_0}{3} \right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 21)$$

und aus der mittleren

$$\sigma_e = \frac{M}{F_e \left(d - \frac{x_0}{3} \right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 22)$$

Die Gleichungen 21) und 22) lassen sich auch unmittelbar aus der Abbildung ablesen, wenn man bedenkt, daß $\sigma_0 \frac{b\,x_0}{2}$ und $\sigma_e F_e$ die gesamte Druck- bezw. Zugkraft, und $d - \frac{x_0}{3}$ den Hebelsarm der Kräfte bedeuten, deren Momente gleich dem Angriffsmoment M sein müssen.

Aus der Gleichung 2 in der Form

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_0} = \frac{b x_0}{2\,F_e}$$

ist außerdem zu entnehmen, daß bei gleichem Verhältnis $\frac{\sigma_e}{\sigma_0}$ die neutrale Schicht um so tiefer rückt, je größer für dieselbe Breite b der Eisenquerschnitt F_e ist.

Eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung ergibt sich dadurch, daß man aus den zulässigen Spannungen die erforderliche Nutzhöhe d der Platte und den erforderlichen Eisenquerschnitt F_e ermittelt. Man spart hierdurch das zeitraubende Probieren (bei vorheriger Annahme der Plattendicke und des Querschnitts der Eiseneinlagen), ob die auszurechnenden Spannungen noch unter den zulässigen Grenzen sind.

Setzt man z. B. nach den ministeriellen Bestimmungen $\sigma_0 =$ 40 kg/qcm, $\sigma_e = 1200$ kg/qcm und $n = 15$, so ergibt sich aus Gleichung 3)

$$\frac{1200}{40} = \frac{d - x_0}{x_0} \cdot 15; \quad \text{hieraus } x_0 = \frac{d}{3}.$$

Mit diesem Wert erhält man dann aus Gleichung 2)

$$1200 \cdot F_e = \frac{40 \cdot d}{2 \cdot 3} \cdot b, \text{ also } F_e = \frac{1}{180} \cdot b \cdot d \quad . \; 23)$$

und schließlich aus Gleichung 1)

$$M = 40 \cdot \frac{b \cdot d^2}{3 \cdot 9} + 1200 \cdot \frac{b \cdot d}{180} \cdot \left(d - \frac{d}{3} \right), \quad \text{woraus}$$

$$d = 0{,}41 \cdot \sqrt{\frac{M}{b}} \quad \ldots\ldots \quad 24)$$

folgt.

Zuerst ist d nach Gleichung 24) zu ermitteln, dann F_e nach Gleichung 23).

Selbstverständlich lassen sich ähnliche Formeln auf dieselbe Weise für irgendwelche anderen Werte von σ_o und σ_e ableiten.

9. Abscherung. a) Unmittelbares Abscheren. Wird der Querschnitt eines Eisenbetonkörpers mit dem Betonquerschnitt F_b und dem Eisenquerschnitt F_e auf unmittelbares Abscheren in Anspruch genommen durch eine zur Querschnittsfläche parallel gerichtete Kraft Q, so können die in jedem der beiden Materialien erzeugten Schubspannungen als über deren Querschnitte gleichmäßig verteilt angesehen werden. Das Verhältnis der Schubspannungen zueinander richtet sich ähnlich wie bei der Verteilung der Druckspannungen nach dem Verhältnis des elastischen Widerstandes der beiden Materialien gegen elastische Verschiebung. Ist letztere für den Beton n mal so groß wie für Eisen, so wird die Schubbeanspruchung des Betons

$$\tau_b = \frac{Q}{F_b + n F_e} \quad \ldots\ldots \quad 25)$$

und diejenige des Eisens

$$\tau_e = \frac{Q}{F_e + \frac{1}{n} F_b} \quad \ldots\ldots \quad 26)$$

b) Abscheren bei Biegung. Bei Biegung kann das Abscheren entweder in der neutralen Schicht des Betonkörpers oder längs der Oberfläche der Eiseneinlagen erfolgen. In beiden Fällen tritt es dort zuerst ein, wo die Transversalkraft am größten, also dicht neben den Auflagern.

Die Berechnung unterscheidet sich im wesentlichen nicht von derjenigen unter 4b für die Abscherung einfacher Betonkörper ohne Eiseneinlagen. Dort war (vergl. Abb. 4) am Auflager

$$D \cdot a = A \cdot 1{,}00 \text{ (vgl. Abb. 7).}$$

Für a tritt hier ein der mit x_o bekannte Wert $d - \frac{x_o}{3}$, woraus

$$D = \frac{A \cdot 1{,}00}{d - \frac{x_o}{3}}.$$

Demnach wird bei der Breite b des Querschnitts in der am stärksten auf Abscheren beanspruchten neutralen Schicht, wie aus Abb. 7 ersichtlich, die Schubspannung

$$\tau = \frac{D}{1{,}00 \cdot b} = \frac{A \cdot 1}{\left(d - \frac{x_o}{3}\right) b \cdot 1} = \frac{3\,A}{(3\,d - x_o)\,b}. \quad 27)$$

Die mit τ verbundene, lotrecht gerichtete, also auch im Querschnitt des Stabes oder der Platte tätige Schubspannung τ^1 er-gibt sich ebenso wie unter 4, und zwar ist

$$\tau^1 = \tau.$$

Die längs der Oberfläche der Eisenstäbe erzeugte Schub- bezw. Adhäsionsspannung, auch Gleitwiderstand genannt, erhält man durch Division der auf die Breite b und Länge 1 (Abb. 7) entfallenden Eisenstaboberfläche in die Zugkraft Z, welche des Gleichgewichts wegen $= D$ ist.

Abb. 7.

Bezeichnet man mit τ_u die gesuchte Schubspannung für die Flächeneinheit der Eisenstaboberfläche und mit U den gesamten Umfang der Querschnitte der Eisenstäbe, so wird (vergl. Abb. 7)

$$U \cdot 1{,}00 \cdot \tau_u = Z = D$$

oder

$$\tau_u = \frac{3\,A}{(3\,d - x_0)\,U} = \frac{b\,\tau}{U} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 28)$$

Sobald im Beton die Schubspannung τ den nach den neuen ministeriellen Bestimmungen zulässigen Wert von 4,5 kg/qcm überschreitet, wird es nötig, einen Teil der Eiseneinlagen, soweit dieselben nicht für die Übertragung des Biegungsmomentes erforderlich sind, durch Abbiegen unter etwa 45° von der Zug- in die Druckzone überzuführen oder andere gleichartig verlaufende Eisenstäbe hinzuzufügen und sämtlich durch genügende Verlängerung innerhalb der Druckzone und Umbiegen der Enden gut zu verankern, indem alsdann die Übertragung der Scherkräfte durch die schräg aufwärts gerichteten Zugkräfte der abgebogenen Eiseneinlagen unterstützt wird.

10. Biegung mit Achsialdruck (ohne Knickgefahr — Gewölbe). Erfolgt bei ungleichförmiger, z. B. einseitiger Anordnung der Eiseneinlage (Abb. 8) die Zusammenpressung dennoch gleichmäßig, so fällt der Druckmittelpunkt m des Achsialdruckes P nicht etwa mit dem Schwerpunkt s des Betonquerschnittes (wofür bei verhältnismäßig geringem Eisenquerschnitt auch der Schwerpunkt des Gesamtquerschnitts gesetzt werden kann) zusammen, vielmehr ist derselbe dem steiferen Eisenquerschnitte zugekehrt um ein Maß e, welches sich aus der Momentengleichung in bezug auf irgend eine, etwa durch Punkt s gelegte Achse ergibt, wonach

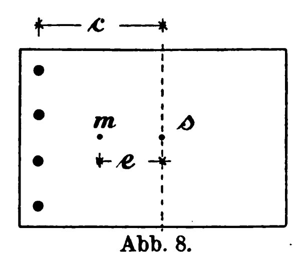


Abb. 8.

$$P \cdot e = \sigma_e \cdot F_e \cdot c.$$

Nach Einsetzung des Wertes für σ_e aus Gl. 15) wird

$$e = \frac{c}{1 + \frac{1}{n} v},$$

wobei das Verhältnis $\frac{F_b}{F_e}$ mit v bezeichnet ist.

Ein Achsialdruck P mit Druckmittelpunkt s erzeugt demnach neben der gleichmäßigen Zusammenpressung noch eine Biegung durch das Moment Pe, welches somit einem bereits vorhandenen Biegungsmomente hinzuzufügen ist. Bei Berechnung der Spannungen in Gewölben ist also der auf die Gewölbemittelachse bezogene Hebelsarm des Tangentialdruckes um die Größe e zu vermehren.

Für die allgemeine Lösung der Aufgabe sind den unter 8, S. 15 u. 16 ermittelten Biegungsspannungen, welchen aber bei ungleichförmiger Eisenverteilung ein um das Nebenmoment Pe entsprechend abzuänderndes Biegungsmoment zugrunde zu legen ist, die unter 2, S. 5 berechneten Achsialdruckspannungen hinzuzufügen. Man erhält dann bei Festhaltung der bisherigen Bezeichnungen als Gesamtdruckspannung des Betons

$$\sigma_b = \frac{2(M + P_e)}{b \cdot x_0 \left(d - \frac{1}{3} x_0\right)} + \frac{P}{F_b + nF_e} \quad . \quad . \quad 29)$$

und als Zugspannung des Eisens

$$\sigma_e = \frac{M + P_e}{F_e \left(d - \frac{1}{3} x_0\right)} - \frac{P}{F_e + \frac{1}{n} F_b} \quad . \quad . \quad . \quad 30)$$

Befindet sich auf der Biegungsdruckseite ebenfalls eine Eiseneinlage F_e', so sind die Biegungsspannungen nach 8, Seite 17, aber gleichfalls unter Berücksichtigung des ähnlich wie oben zu ermittelnden Nebenmoments Pe festzustellen; sie seien σ_b^1 bezw. σ_e^1; alsdann werden die Gesamtspannungen

$$\sigma_b = \sigma_b^1 + \frac{P}{F_b + n(F_e + F_e^1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31)$$

$$\sigma_e = \sigma_e^1 - \frac{P}{(F_e + F_e^1) + \frac{1}{n} F_b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32)$$

11. Achsialdruck mit Knickgefahr. (Stützen.) Die bekannte Eulersche Formel über Knickfestigkeit für gleichartigen Baustoff lautet:

$$P = \frac{r}{s} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{J\pi^2}{l^2}.$$

Hierin bezeichnet l die Länge des achsial gedrückten Stabes, J das

kleinste Querschnittsträgheitsmoment, s die Sicherheitsziffer, r eine von der Befestigungsart der Stabenden abhängige Zahl und α wie bisher die spezifische elastische Formänderung unter der Spannungseinheit.

Für den nach seiner Längsrichtung mit unverrückbaren Eisenstäben verstärkten Betonstab beziehe sich α auf Beton, β mit derselben Bedeutung auf Eisen; J_b und J_e seien die Anteile der kleinsten Trägheitsmomente des Beton- bezw. Eisenquerschnitts, deren Schwerpunkte als zusammenfallend vorausgesetzt werden.

Da man bei einem in sich fest verbundenen Körper, wie der hier vorliegende Verbundkörper mit unverrückbaren Eisenstäben — die Unverrückbarkeit der Eisenstäbe muß durch zuverlässige, in nicht zu großen Abständen angeordnete Querverbindungen gewährleistet sein —, den Gesamtknickwiderstand als die Summe der Teilknickwiderstände annehmen kann, so wird

$$P = \frac{r}{s}\frac{\pi^2}{l^2}\left(\frac{J_b}{\alpha} + \frac{J_e}{\beta}\right) = \frac{r}{s}\frac{\pi^2}{l^2\beta}\left(J_e + \frac{1}{n}J_b\right),$$

wenn, wie früher, das Verhältnis $\frac{\alpha}{\beta}$ mit n bezeichnet wird.

In der Regel wird J_b mit der Form oder der zulässigen Dicke der Stütze gegeben oder anzunehmen sein; es ergibt sich dann

$$J_e = \frac{s}{r}\frac{Pl^2}{\pi^2}\cdot\beta - \frac{1}{n}J_b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33)$$

Bei 10facher Sicherheit und für $n = 15$ ergibt sich:

$$J_e = \frac{10}{r}\frac{Pl^2}{2} - \frac{1}{15}J_b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34)$$

oder

$$P = \frac{1}{5}r\frac{J_e + \frac{1}{15}J_b}{l^2},$$

wobei P in Tonnen und l in m, J_e und J_b jedoch in cm auszudrücken sind.

Unter der Voraussetzung, daß die Stabenden in ihrer Achse fest geführt sind, eine Bedingung, welche bei Bauten wohl stets erfüllt ist, tritt für r, je nachdem beide Enden des Stabes frei beweglich oder fest eingespannt gehalten werden, die Zahl 1 bezw. 4 ein.

Für den ersten, meist vorkommenden Fall wird bei 10facher Sicherheit

$$J_e + \frac{1}{15}J_b = 5\,Pl^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 35)$$

im Falle beiderseitiger Einspannung wird

$$J_e + \frac{1}{15}J_b = \frac{5}{4}\,Pl^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 36)$$

im Falle einseitiger Einspannung wird

$$J_e + \frac{1}{15} J_b = \frac{5}{2} Pl^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 37)$$

Endlich ist für den Fall, daß das eine Ende eingespannt, das andere ganz frei ist

$$J_e + \frac{1}{15} J_b = 20 Pl^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 38)$$

Auf das Ähnliche in der Form dieser Ausdrücke mit den in 6, Seite 14 entwickelten einfachen Druckspannungsgleichungen sei hingewiesen; während dort die einfachen Flächeninhalte F_e und $\frac{1}{n} F_b$ auftreten, sind es hier die Trägheitsmomente der Querschnitte. Auch ist das Verhältnis der Werte ähnlich demjenigen der entsprechenden Beziehungen für gleichartigen Baustoff.

12. Biegung der Plattenbalken. Unter Plattenbalken (Abb. 9) sei eine durch eine Eisenbetonrippe verstärkte Platte verstanden, welche demzufolge ganz oder annähernd T-förmigen Querschnitt besitzt.

In der Regel liegt die Verstärkungsrippe auf der Biegungszugseite, und die unter 8 für den rechteckigen Querschnitt entwickelten Formeln 20, 21 und 22 sind auch hier gültig, vorausgesetzt, daß die Entfernung x_0 nicht größer als die Plattendicke d_0 sich ergibt, also die neutrale Schicht nicht außerhalb der Plattendicke fällt. Im Grenzfall ist $x_0 =$ der Plattendicke d_0, und es wird

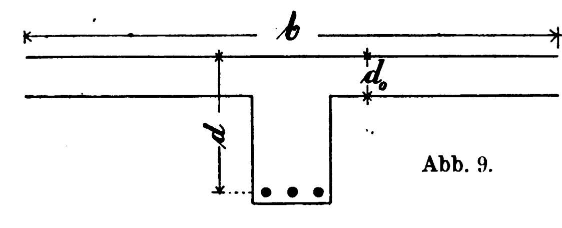


Abb. 9.

$$\sigma_0 = \frac{2M}{b d_0 \left(d - \frac{d_0}{3}\right)}; \quad \sigma_e = \frac{M}{F_e \left(d - \frac{d_0}{3}\right)}, \quad 39) \text{ u. } 40)$$

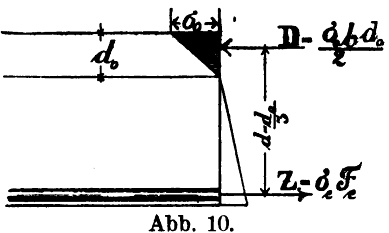


Abb. 10.

welche Formeln auch unmittelbar aus Abb. 10 zu entnehmen sind, da $\sigma_0 \frac{b\, d_0}{2}$ und $\sigma_e \cdot F_e$ die gesamte Druck- bezw. Zugspannung und $d - \frac{d_0}{3}$ den zugehörigen Hebelsarm darstellen.

Der dritte mögliche Fall ist derjenige, daß die neutrale Schicht in den Steg fällt (Abb. 11).

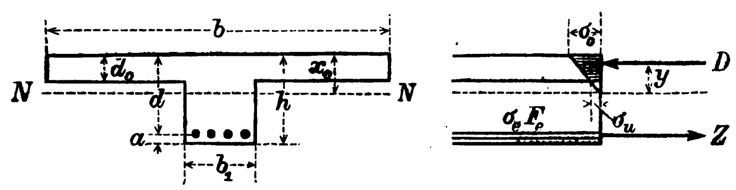


Abb. 11.

Das Angriffsmoment ist ähnlich wie bei der unter 8, Seite ~~15~~ 16 untersuchten Platte

$$1)\qquad M = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2} \cdot b \cdot d_o \cdot y + \sigma_e \cdot F_e \cdot (d - x_o)$$

mit den in Abb. 11 angegebenen Bezeichnungen.

Zur Berechnung der drei Unbekannten σ_o, σ_u und σ_e lassen sich die drei Bedingungsgleichungen aufstellen

$$2)\qquad \frac{\sigma_o}{\sigma_u} = \frac{x_o}{x_o - d_o}$$

$$3)\qquad \frac{\sigma_e}{\sigma_o} = \frac{d - x_o}{x_o} \cdot n$$

$$4)\qquad \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2} \cdot b \cdot d_o = \sigma_e \cdot F_e,$$

während sich der unbekannte Abstand y (Abb. 11) aus der Gleichung für den Schwerpunktsabstand des Drucktrapezes vom oberen Rande

$$5)\qquad x_o - y = \frac{d_o}{3} \cdot \frac{\sigma_o + 2\sigma_u}{\sigma_o + \sigma_u}$$

bestimmen läßt.

Aus den Gleichungen 2), 3) und 4) erhält man den Abstand der neutralen Achse

$$x_o = \frac{n \cdot F_e \cdot d + \dfrac{b \cdot d_o^2}{2}}{n \cdot F_e + b \cdot d_o} \quad \ldots\ldots \quad 41)$$

und durch Einsetzen von σ_o aus Gl. 2) in Gl. 5)

$$y = x_o - \frac{d_o}{2} + \frac{d_o^2}{6 \cdot (2 \cdot x_o - d_o)} \quad \ldots \quad 42)$$

und schließlich aus Gl. 1) und 4) die Zugspannung im Eisen

$$\sigma_e = \frac{M}{F_e \cdot (d - x_o + y)}, \quad \ldots\ldots \quad 43)$$

hierauf aus Gl. 3) die Druckspannung im Beton

$$\sigma_0 = \sigma_e \cdot \frac{x_0}{n \cdot (d - x_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44)$$

Auch in diesem Falle lassen sich die Gleichungen 24) und 23) zur vorläufigen Ermittlung der Balkenhöhe d und des erforderlichen Eisenquerschnitts F_e mit genügender Annäherung verwenden, um das langwierige Probieren, wenn d und F_e vorher angenommen werden, zu umgehen.

Die bei der Biegung entstehenden Schubspannungen werden hierbei innerhalb der Rippe besonders groß, weil sie nur mit ihrer geringen Breite zur Wirkung kommt.

Mit Beibehaltung der bisher gewählten Bezeichnungen, denen nur noch b_1 als Breite der Rippe hinzugefügt sei (vergl. Abb 11), wird entsprechend den Gleichungen 27) und 28)

$$\tau = \frac{3\,A}{(3\,d - x_0)\,b_1} \quad \text{und} \quad \tau_u = \frac{3\,A}{(3\,d - x_0)\,U} = \frac{b_1\,\tau}{U}.$$

Da nun b_1 im Vergleich zu A um so kleiner wird, je größer die Gurtbreite b gewählt ist, so genügt für die Aufnahme der Schubspannungen die Breite b_1, die zunächst von der Form, Größe und Anzahl der erforderlichen Eisenstäbe abhängt, in der Regel nicht Es wird deshalb in den meisten Fällen nötig, die auf Seite 19 angegebene Abbiegung eines Teils der Eiseneinlagen, die nicht für die Aufnahme der Biegungsmomente erforderlich sind, von der Stelle ab vorzunehmen, wo die Schubspannung innerhalb der Rippe ihren größten zulässigen Wert erreicht; gegebenenfalls sind für diese Zwecke noch besondere Schrägstäbe mit genügend langen wagerechten Anschlußenden hinzuzufügen.

Wird der zulässige Wert mit τ^1 (nach den ministeriellen Bestimmungen = 4,5 kg/qcm) bezeichnet und ergab sich $\tau > \tau^1$, so muß an der bezeichnenden Stelle die größte Querkraft $= \frac{A \cdot \tau^1}{\tau}$ sein.

Aus dieser Bedingung folgt der Abstand ξ der fraglichen Stelle vom Balkenende (Auflagermitte). Ist z. B. der Balken mit q kg/m belastet, so ist

$$\xi = \frac{A - V}{q}.$$

Die Größe des Querschnitts der unter 45° aufzubiegenden Stäbe ist aus der Zugkraft Z zu bestimmen, die von ihnen aufzunehmen ist. Diese beträgt

$$Z = \frac{(\tau - \tau^1)\,\xi \cdot b_1}{2 \cdot \cos 45^0} = 0{,}71 \cdot (\tau - \tau^1)\,\xi \cdot b_1.$$

Sind n Stäbe von je f_e^1 Querschnitt aufgebogen, so ist die Zugbeanspruchung jedes Stabes

$$\sigma_z = \frac{Z}{n \cdot f_e^1}.$$

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin S.W.

